

virtualized Delta unknotting number が 1 である無限個の 仮想結び目と任意の n -writhe 列

大阪大学 大学院理学研究科 数学専攻
上田亮太 (Ryota UEDA) *

概要

向きづけられた S^1 の \mathbb{R}^3 への埋め込みの像を有向結び目という。有向結び目の図式に仮想交差を加えたものを有向仮想結び目図式といい、そのような図式の同値類として有向仮想結び目が定義される。これは有向結び目のある種の一般化として知られている。任意の有向仮想結び目に對し、有限回のある局所変形を行うことで自明な有向仮想結び目に変形できるような局所変形を有向仮想結び目の結び目解消操作といい、virtualization や virtualized Δ -move などが知られている。また、 n -writhe とは任意の 0 でない整数 n に対して定まる有向仮想結び目の不変量である。本講演では、ある条件をもつ整数列に対し、 n -writhe の列がその整数列と一致し、かつ virtualized Δ -move 1 回で自明になるような無限個の有向仮想結び目の構成法を紹介する。

1 仮想結び目

向きづけられた S^1 を \mathbb{R}^3 へ埋め込んだ像を有向結び目という。

向きづけられた S^1 から \mathbb{R}^2 へのはめ込みで、特異点が有限個の横断的な二重点のみであるようなものに對し、その像の各二重点に図 1 のような実交差と仮想交差の構造を入れたものを有向仮想結び目図式といい。実交差において、弧がつながっている方を上交差、弧がつながっていない方を下交差という。また、交差がない有向仮想結び目図式を自明な有向仮想結び目図式といいう。

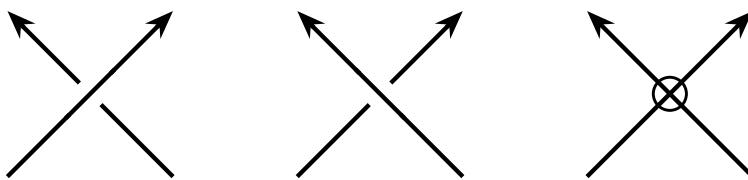


図 1: 実交差（左、中央）と仮想交差（右）。

定義 1.1. ([4]). 二つの有向仮想結び目図式 D, D' が図 2 で表される有限回の一般化ライデマイスター変形と \mathbb{R}^2 上のアンビエントアイソトピーで互いに移り合うとき、 D と D' は同値であるといいう。ただし、図 2 の図式には任意の向きを入れてよいものとする。この同値関係による有向仮想結び目図式の同値類を有向仮想結び目といいう。

* E-mail:u018447f@ecs.osaka-u.ac.jp

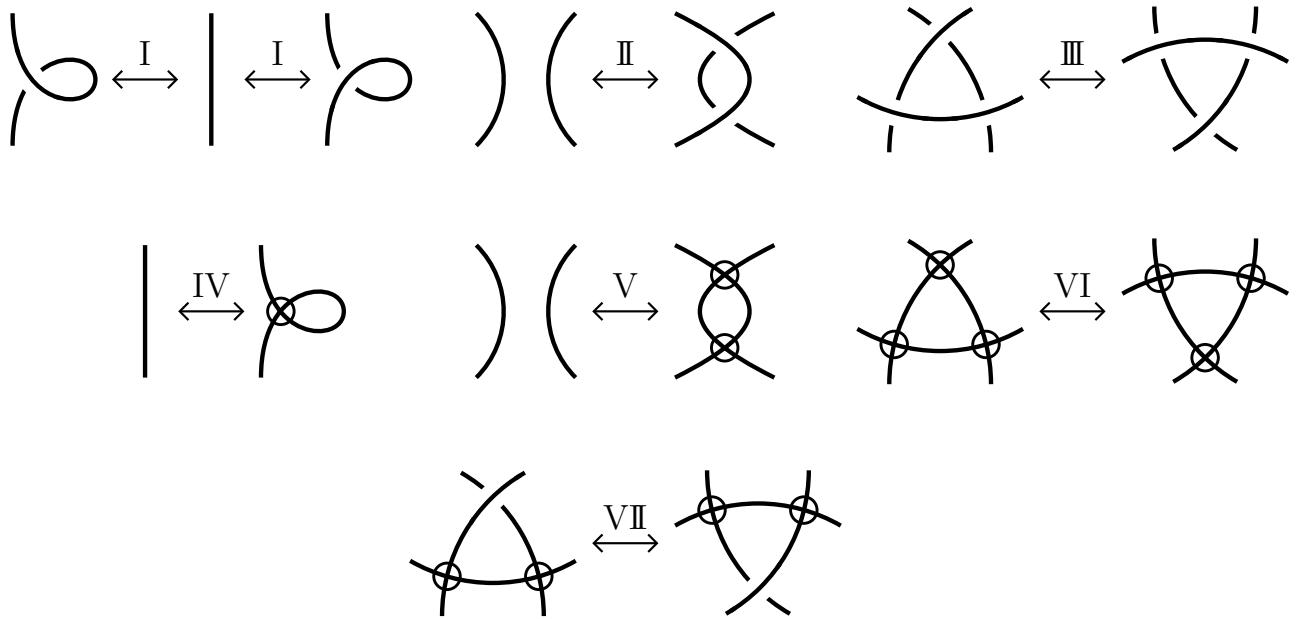


図 2: 一般化ライデマイスター変形.

有向仮想結び目は有向結び目のある種の一般化とみなすことができる.

以下, 有向仮想結び目図式と有向仮想結び目を, それぞれ単に仮想結び目図式, 仮想結び目と呼ぶ.

2 ガウス図式

定義 2.1. 向きづけられた S^1 に有限本の向きづけられた符号付きコードを付け加えたものをガウス図式という.

仮想結び目図式からガウス図式への対応を考える. D を仮想結び目図式とする. D は向きづけられた S^1 の \mathbb{R}^2 へのめ込みの像であるから, 向きづけられた S^1 をそのめ込みの逆像として考えることができる. このとき, D の各実交差に対し, その逆像が S^1 上に 2 点ずつ現れる. (仮想交差の逆像は考えないことに注意する.) 同じ実交差の逆像 2 点をコードで結び, 上交差の逆像から下交差の逆像へコードに向きを付ける. さらに, D の各実交差には図 3 のように符号を定め, 各実交差に対応するコードに同じ符号を定める. これにより仮想結び目図式 D からガウス図式 G への対応が得られる.

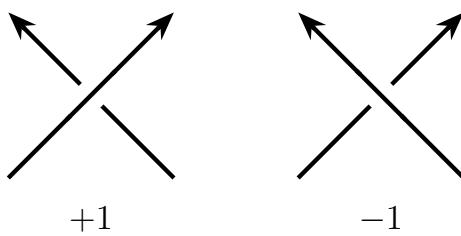


図 3: 実交差の符号.

例 2.2. 図 4 の仮想結び目図式 D は仮想 8 の字結び目の図式であり, ガウス図式 G は D に対応するガウス図式である.

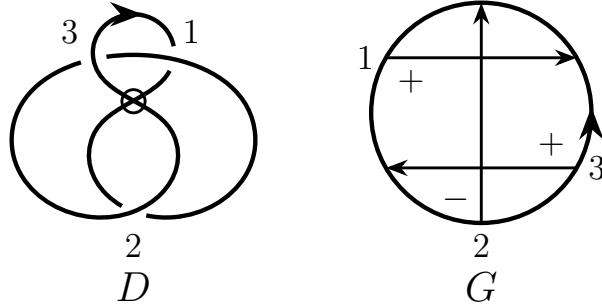


図 4: ガウス図式の例.

定義 2.3. 二つのガウス図式 G, G' が図 5 で表される有限回のガウス図式のライデマイスター変形で互いに移り合うとき, G と G' は同値であるという.

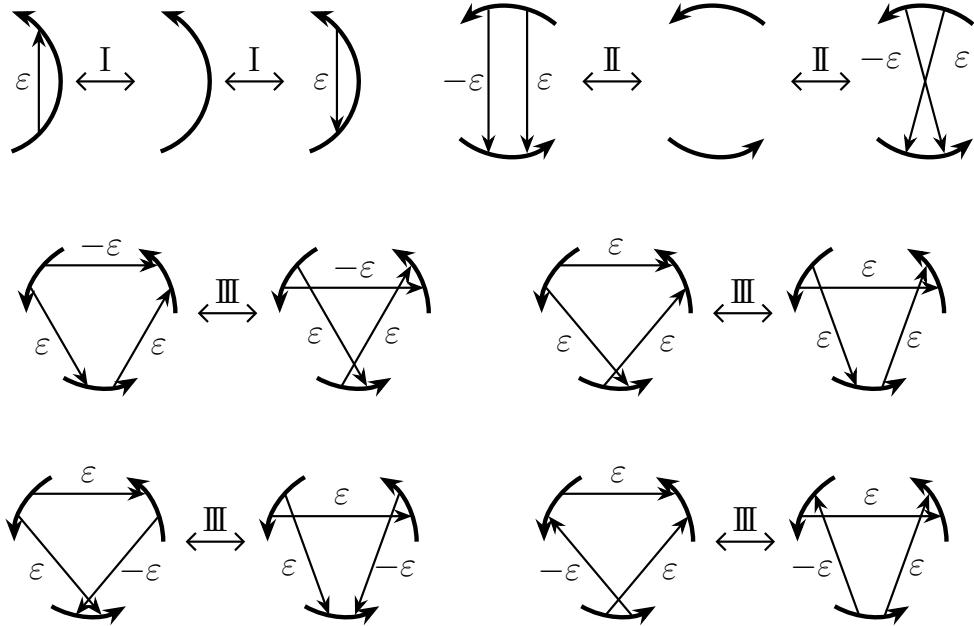


図 5: ガウス図式のライデマイスター変形 ($\varepsilon = \pm 1$).

定理 2.4. ([2, 4]). 仮想結び目全体の集合と定義 2.3 の同値関係によるガウス図式の同値類全体の集合との間には, 仮想結び目図式 D からガウス図式 G への対応から導かれる全单射が存在する.

定理 2.4 により, 仮想結び目とガウス図式の同値類を同一視することができる.

3 n -writhe

G をガウス図式とする. $c = \overrightarrow{PQ}$ を始点 P , 終点 Q とする G のコードとし, c の符号を $\varepsilon = \varepsilon(c)$ とする. このとき, 始点 P と終点 Q の符号を $\varepsilon(P) = -\varepsilon$, $\varepsilon(Q) = \varepsilon$ と定義する. また, コード c

は G の円周を二つの弧に分ける. コード c が定める弧 γ を図 6 のように P から Q に向かうガウス図式の円周の向きに沿った弧とする.

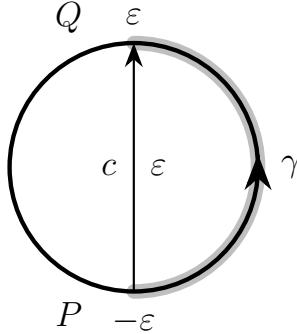


図 6: コード c が定める弧 γ .

定義 3.1. ([8]). コード c が定める弧 γ の内部に含まれるすべてのコードの端点について, その符号の総和を c の index といい, $\text{Ind}(c)$ と表す. また, 任意の 0 でない整数 n に対し, ガウス図式 G の index が n であるコードの符号の総和を n -writhe といい, 次のように表す:

$$J_n(G) = \sum_{\text{Ind}(c)=n} \varepsilon(c).$$

補題 3.2. ([8]). D, D' を仮想結び目図式とし, G, G' をそれぞれ D, D' に対応するガウス図式とする. D と D' が同値であるならば, 任意の 0 でない整数 n に対し, $J_n(G) = J_n(G')$ が成り立つ.

補題 3.2 より, 0 でない各整数 n に対し, n -writhe は仮想結び目の不変量となる. よって, K を仮想結び目, D を K の仮想結び目図式, G を D に対応するガウス図式とすると, 任意の 0 でない整数 n に対し, 仮想結び目 K の n -writhe を $J_n(K) = J_n(G)$ と定める.

定理 3.3. ([8]). 任意の仮想結び目 K は $\sum_{n \neq 0} n J_n(K) = 0$ をみたす. 逆に, 任意の整数列 $\{r_n\}_{n \neq 0}$ に対し, $\sum_{n \neq 0} n r_n = 0$ をみたすならば, ある仮想結び目 K で, 任意の 0 でない整数 n に対し, $J_n(K) = r_n$ をみたすものが存在する.

仮想結び目 K の不変量 odd writhe $J(K)$ を次のように定義する ([5, 8]):

$$J(K) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_{2n-1}(K).$$

命題 3.4. ([1]). 任意の仮想結び目 K に対し, K の odd writhe $J(K)$ は偶数である.

4 結び目解消操作

仮想結び目図式の局所変形について, 任意の仮想結び目図式が有限回のその局所変形と一般化ライデマイスター変形により自明な仮想結び目図式に変形されるとき, その局所変形を仮想結び目の結び目解消操作という. 結び目解消操作に対し, 仮想結び目 K の仮想結び目図式を自明な仮想結び目図式に変形するのに必要な結び目解消操作の最小回数を K の結び目解消数という.

図 7 が表す仮想結び目図式の局所変形を virtualization という。ただし、仮想結び目の向きは任意に与えてよいものとする。virtualization は仮想結び目の結び目解消操作である。virtualization による仮想結び目 K の結び目解消数を K の virtual unknotting number といい、 $u_v(K)$ と表す。

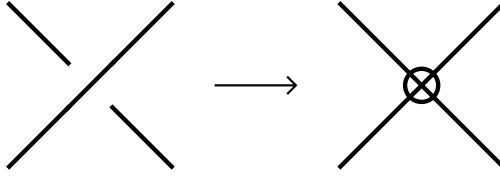


図 7: virtualization.

定義 4.1. ([6]). 図 8 が表す仮想結び目図式の局所変形を virtualized Δ -move といい、図式上では $v\Delta$ と表す。ただし、仮想結び目の向きは任意に与えてよいものとする。

virtualized Δ -move をガウス図式で表すと、図 9 のようになる。

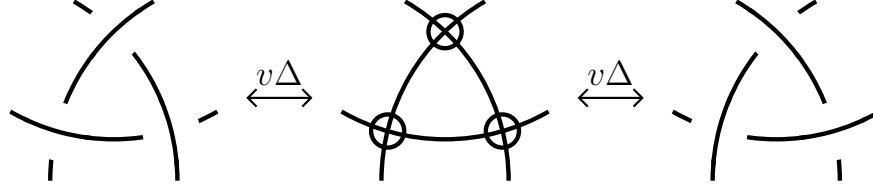


図 8: virtualized Δ -move.

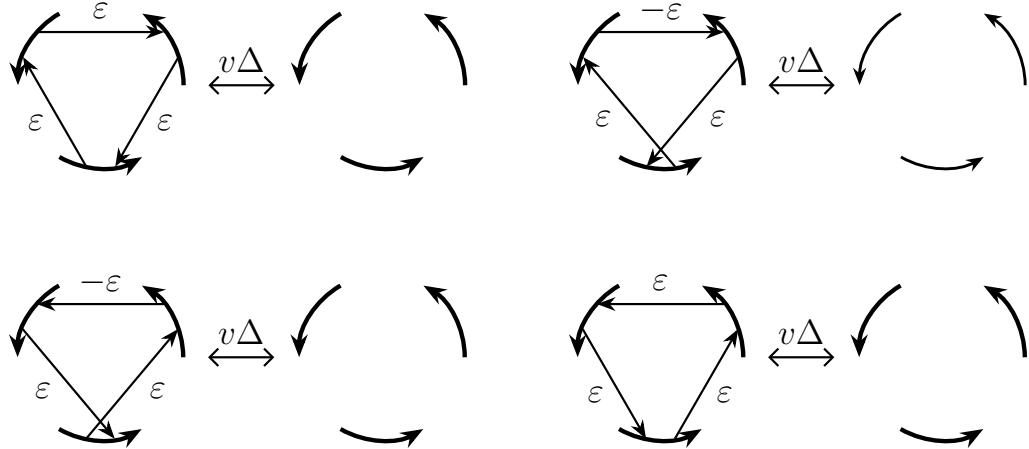


図 9: ガウス図式における virtualized Δ -move ($\varepsilon = \pm 1$)。

定理 4.2. ([6]). virtualized Δ -move は仮想結び目の結び目解消操作である。

virtualized Δ -move による仮想結び目 K の結び目解消数を K の $v\Delta$ -unknotting number といい、 $u_{v\Delta}(K)$ と表す。

命題 4.3. ([6]). 任意の仮想結び目 K は $u_{v\Delta}(K) \geq \frac{1}{2}|J(K)|$ をみたす。

5 ガウス図式の連結和

定義 5.1. G_1, G_2 をガウス図式で、次の条件をみたす G_1 のコード c_1, c_2 と G_2 のコード c'_1, c'_2 があるものとする：

1. c_i の符号を ε_i , c'_i の符号を ε'_i としたとき、 $\varepsilon_i = \varepsilon'_i$ が成り立つ ($i = 1, 2$),
2. c_1 の始点と c_2 の終点が円周 S^1 上でその順に隣り合っている,
3. c'_2 の始点と c'_1 の終点が円周 S^1 上でその順に隣り合っている.

このとき、図 10 のように c_1 と c_2 および c'_1 と c'_2 の隣り合った端点の近傍を取り除き、 c_1 と c'_1 および c_2 と c'_2 をつなげ、さらに 2 つのガウス図式の円周もつなげて得られるガウス図式をコード c_1, c_2, c'_1, c'_2 に関する G_1 と G_2 の連結和といい、 $G_1 \natural G_2$ と書く。

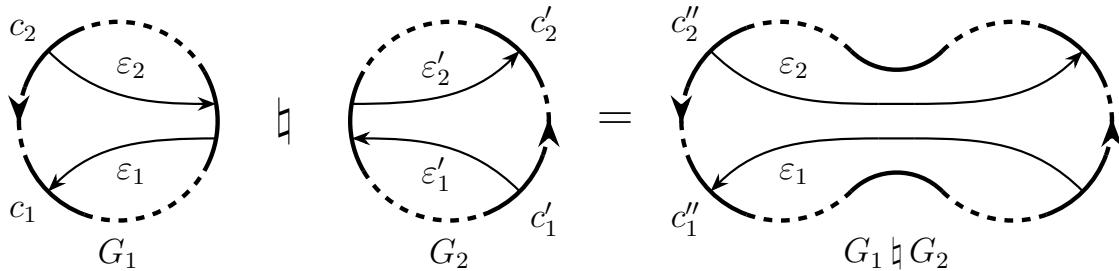


図 10: c_1, c_2, c'_1, c'_2 に関する G_1 と G_2 の連結和 $G_1 \natural G_2$.

補題 5.2. 定義 5.1 の条件をみたす二つのガウス図式 G_1, G_2 について、 $\text{Ind}(c_1) = \text{Ind}(c_2) = 0$ ならば、任意の 0 でない整数 n に対し、 $J_n(G_1 \natural G_2) = J_n(G_1) + J_n(G_2)$ となる。

6 結び目解消操作と n -writhe 列

Ohyama–Sakurai[7] により、virtualization と n -writhe 列について次の結果が知られている。

定理 6.1. ([7]). 整数列 $\{r_n\}_{n \neq 0}$ が $\sum_{n \neq 0} n r_n = 0$ をみたすならば、ある無限個の仮想結び目 K_m ($m \in \mathbb{N}$) で、任意の 0 でない整数 n に対し、次をみたすものが存在する：

$$u_v(K_m) = 1 \quad \text{かつ} \quad J_n(K_m) = r_n.$$

これに対し、本研究では virtualized Δ -move と n -writhe 列について次が成り立つことを示す。

定理 6.2. (主結果). 整数列 $\{r_n\}_{n \neq 0}$ が $\sum_{n \neq 0} n r_n = 0$ かつ $\sum_{n \in \mathbb{Z}} r_{2n-1} \in \{0, \pm 2\}$ をみたすならば、ある無限個の仮想結び目 K_m ($m \in \mathbb{N}$) で、任意の 0 でない整数 n に対し、次をみたすものが存在する：

$$u_{v\Delta}(K_m) = 1 \quad \text{かつ} \quad J_n(K_m) = r_n.$$

注意 6.3. 定理 3.3 より、任意の仮想結び目 K の n -writhe について $\sum_{n \neq 0} n J_n(K) = 0$ となる。さらに、仮想結び目 K が $u_{v\Delta}(K) = 1$ をみたすならば、命題 4.3 より、 K の odd writhe $J(K)$ について $|J(K)| \leq 2$ となり、命題 3.4 より、 $J(K) \in \{0, \pm 2\}$ となる。よって、定理 6.2 の整数列 $\{r_n\}_{n \neq 0}$ の条件 $\sum_{n \neq 0} n r_n = 0$ と $\sum_{n \in \mathbb{Z}} r_{2n-1} \in \{0, \pm 2\}$ は自然に導かれる。

定理 6.2 の証明の概略. 与えられた整数列 $\{r_n\}_{n \neq 0}$ に対し、定義 5.1 の連結和を用いて、任意の自然数 m で図 11 のように定まるガウス図式 G_m を定義する（詳細はここでは省略する）。 G_m が表す仮想結び目を K_m とすると、これらが $u_{v\Delta}(K_m) = 1$ かつ任意の 0 でない整数 n に対し、 $J_n(K_m) = r_n$ をみたす無限個の仮想結び目となっている。

n -writhe が一致することは補題 5.2 を用いて示される。 $u_{v\Delta}(K_m) = 1$ は、図 11 の赤色のコードを virtualized Δ -move で取り除くことで自明になることが分かる。各自然数 m で K_m が異なっていることについては first intersection polynomial ([3]) を計算することで示される。□

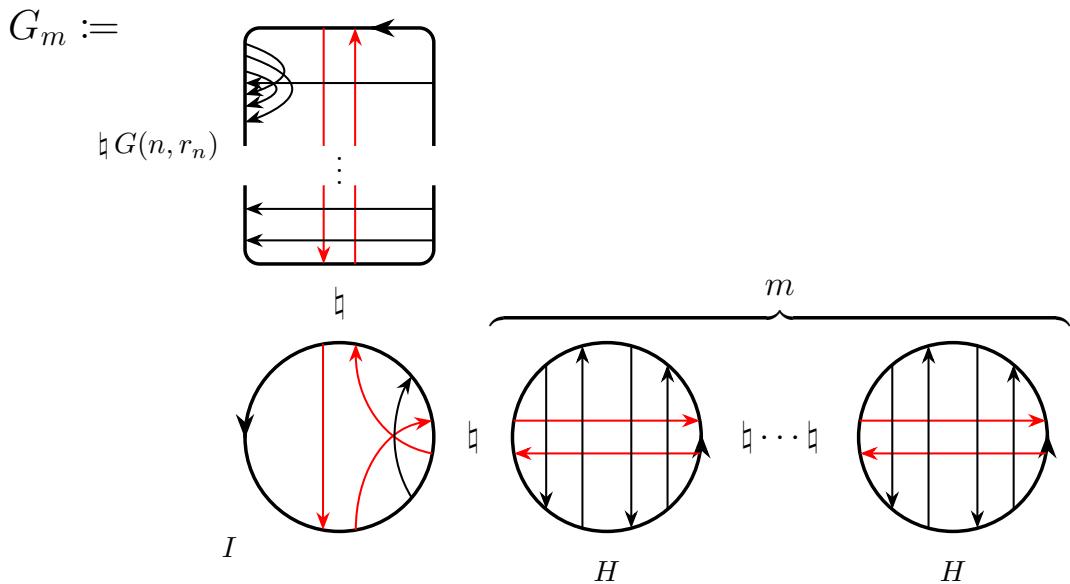


図 11: ガウス図式 G_m .

参考文献

- [1] Cheng, Z.: A polynomial invariant of virtual knots. Proc. Amer. Math. Soc. **142**(2), 713–725 (2014)
- [2] Goussarov, M., Polyak, M., Viro, O.: Finite-type invariants of classical and virtual knots. Topology **39**(5), 1045–1068 (2000)
- [3] Higa, R., Nakamura, T., Nakanishi, Y., Satoh, S.: The intersection polynomials of a virtual knot I: definitions and calculations. Indiana Univ. Math. J. **72**(6), 2369–2401 (2023)
- [4] Kauffman, L.H.: Virtual knot theory. European J. Combin. **20**(7), 663–690 (1999)
- [5] Kauffman, L.H.: A self-linking invariant of virtual knots. Fund. Math. **184**, 135–158 (2004)
- [6] Nakamura, T., Nakanishi, Y., Satoh, S., Wada, K.: Virtualized Delta moves for virtual knots and links. to appear in J. Topol. Anal.
- [7] Ohyama, Y., Sakurai, M.: Infinitely many virtual knots with any given sequence of n -writhes. to appear in J. Knot Theory Ramifications
- [8] Satoh, S., Taniguchi, K.: The writhes of a virtual knot. Fund. Math. **225**(1), 327–342 (2014)